Construction Métallique
07.a- Théorie du Flambement (Théorie d'Euler)

ISA BTP
ÉCOLE D'INGÉNIEURS

Philippe MARON
Maître de conférences
ISABTP-UPPA

01 Décembre 2016

- **Objectif : Assurer la stabilité**
  - au niveau d'ensemble de la structure
  - au niveau de chacun des éléments qui la constituent.
- **=> vérifier :**
  - contraintes + déformations < valeurs limites acceptables

- **Deux cas de figures pour les déformations :**
  - *petites déformations* : sollicitations ne sont pas modifiées par les déformations
  - *grandes déformations* : sollicitations sont modifiées

- **Déformations importantes apparaissent quand :**
  - **En domaine élastique, la corrélation linéaire entre efforts et déformations n'est plus vérifiée.**

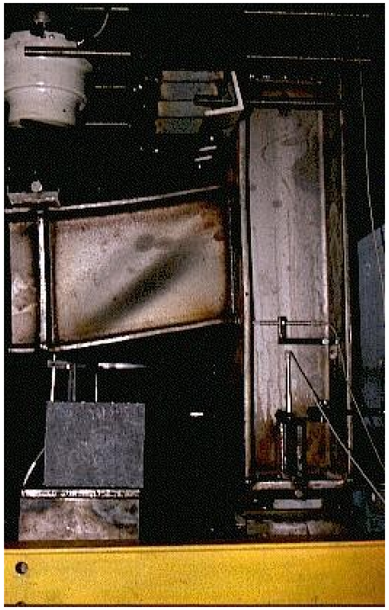
    => Les déformations augmentent alors plus vite que les sollicitations.
  - **En domaine élasto-plastique, lorsqu'il y a *écoulement plastique*.**

- **Grandes déformations => zones comprimées**
- **=> 3 formes de grandes déformations nommées instabilités :**
  - flambement,

Cette barre a flambé

- **Grandes déformations => zones comprimées**
- **=> 3 formes de grandes déformations nommées instabilités :**
  - flambement,
  - déversement

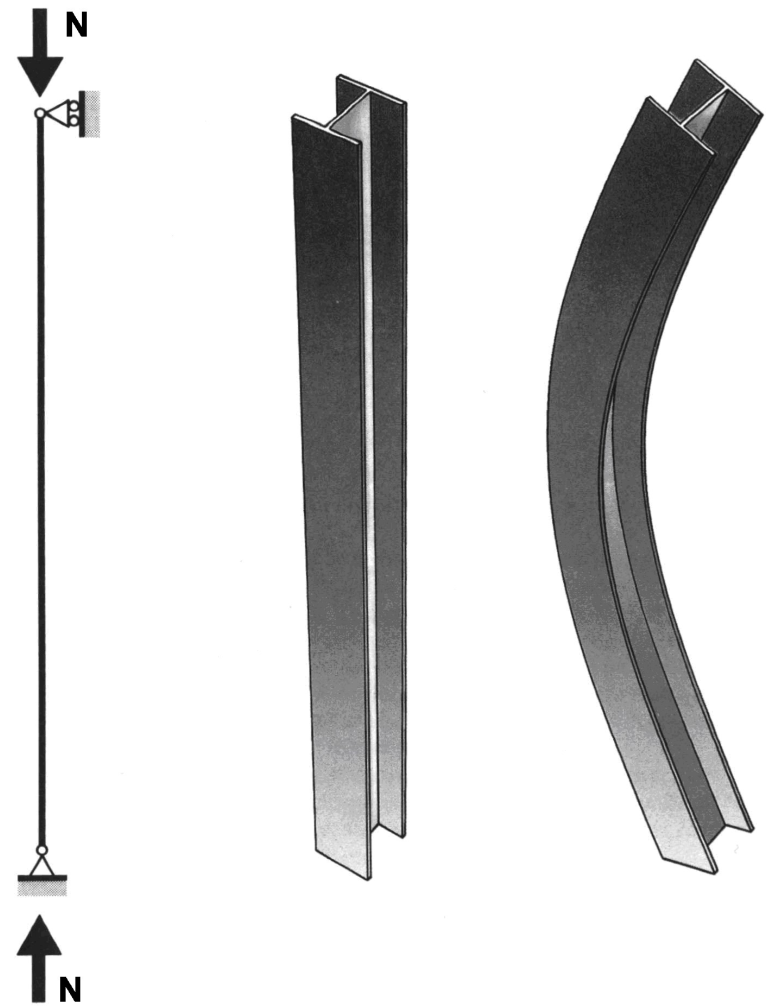
- Grandes déformations => zones comprimées
- => 3 formes de grandes déformations nommées instabilités :
  - flambement,
  - déversement
  - Voilement



- apparaissent dans poutres,poteaux

  => peuvent donc conduire à la ruine de la structure.

- Coefficients de sécurité en instabilité : $\gamma_{M1}=1,1$

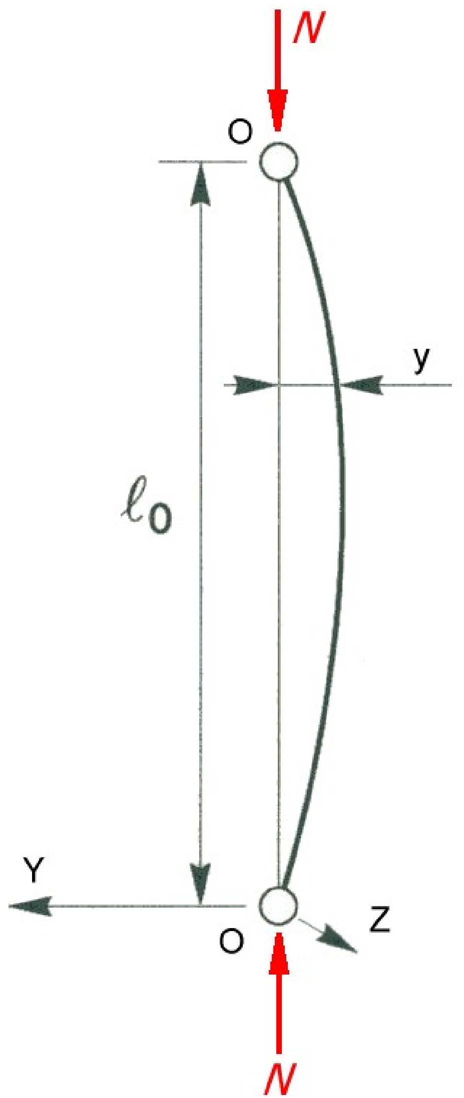


Système statique

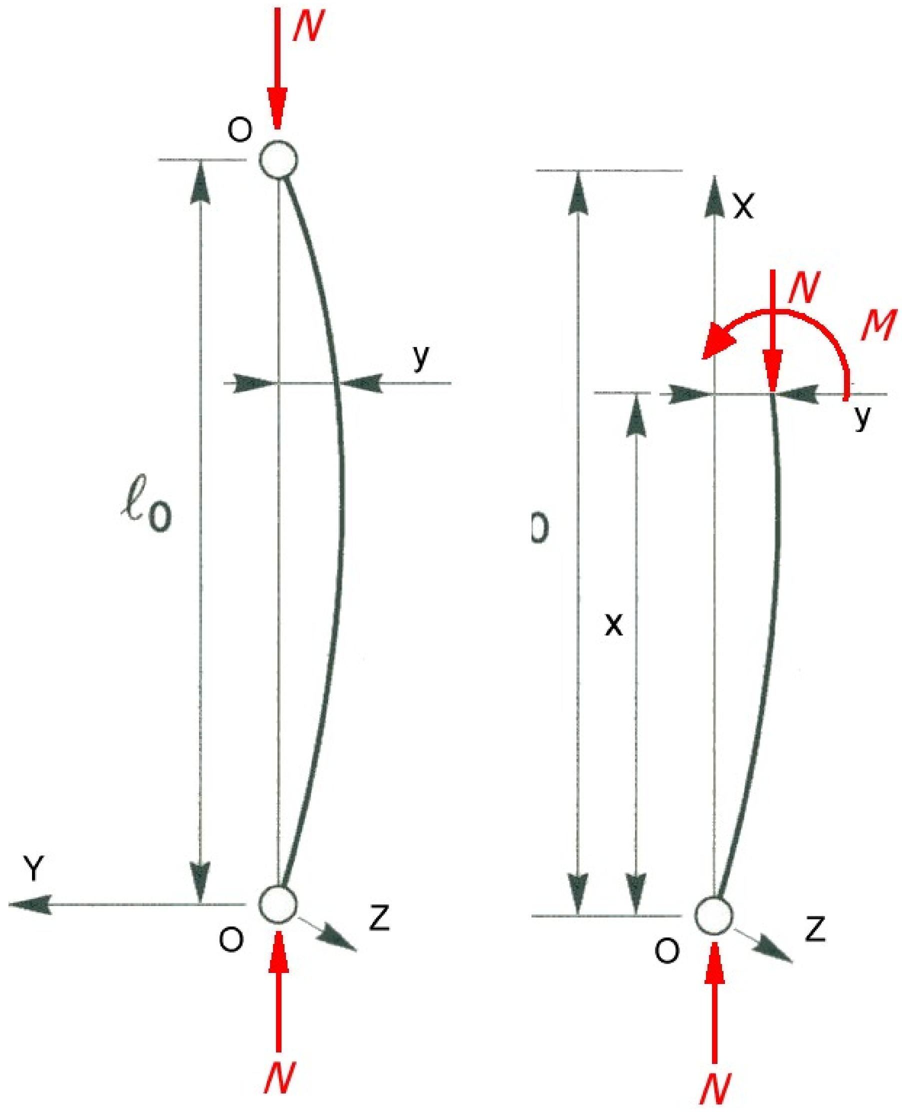
Position
non déformée

Position
déformée

Théorie d'Euler (flexion simple)

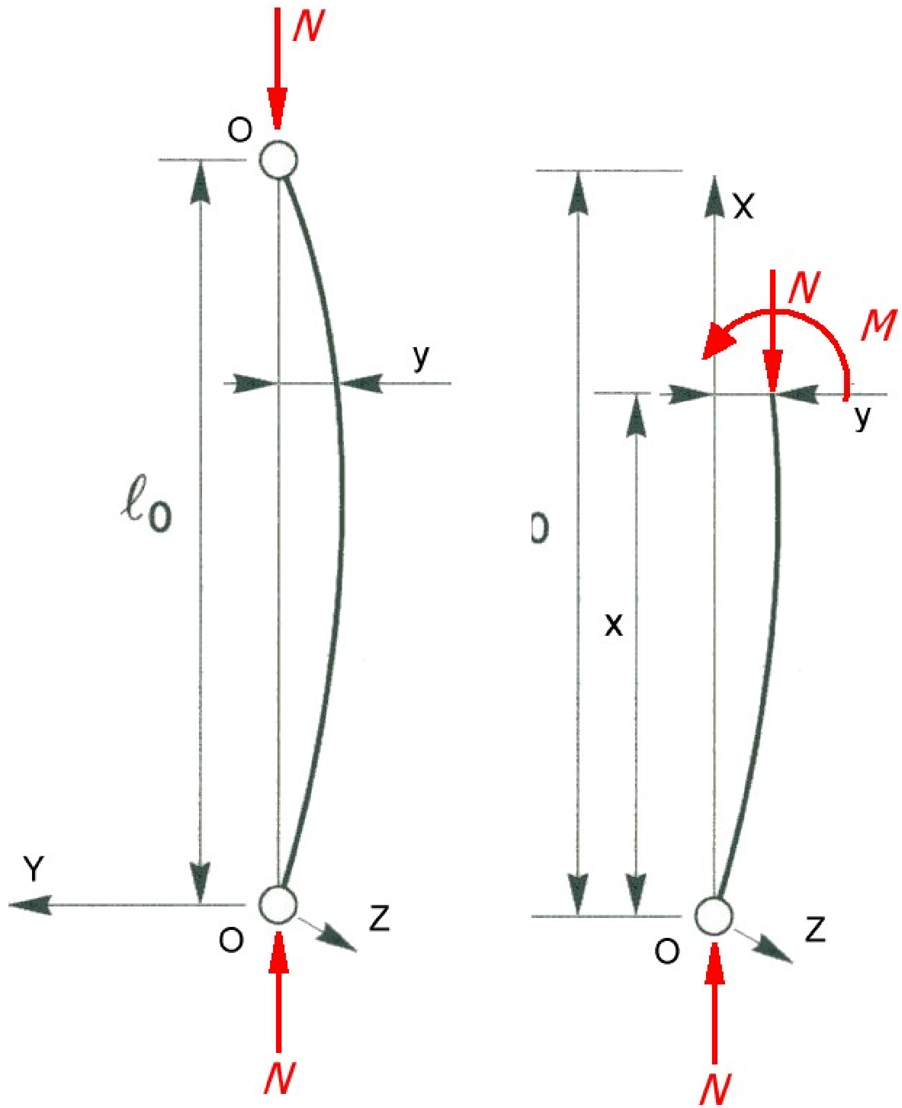


Théorie d'Euler (flexion simple)



$$M(x) = -E.I_z . \frac{d^2 y(x)}{dx^2}$$

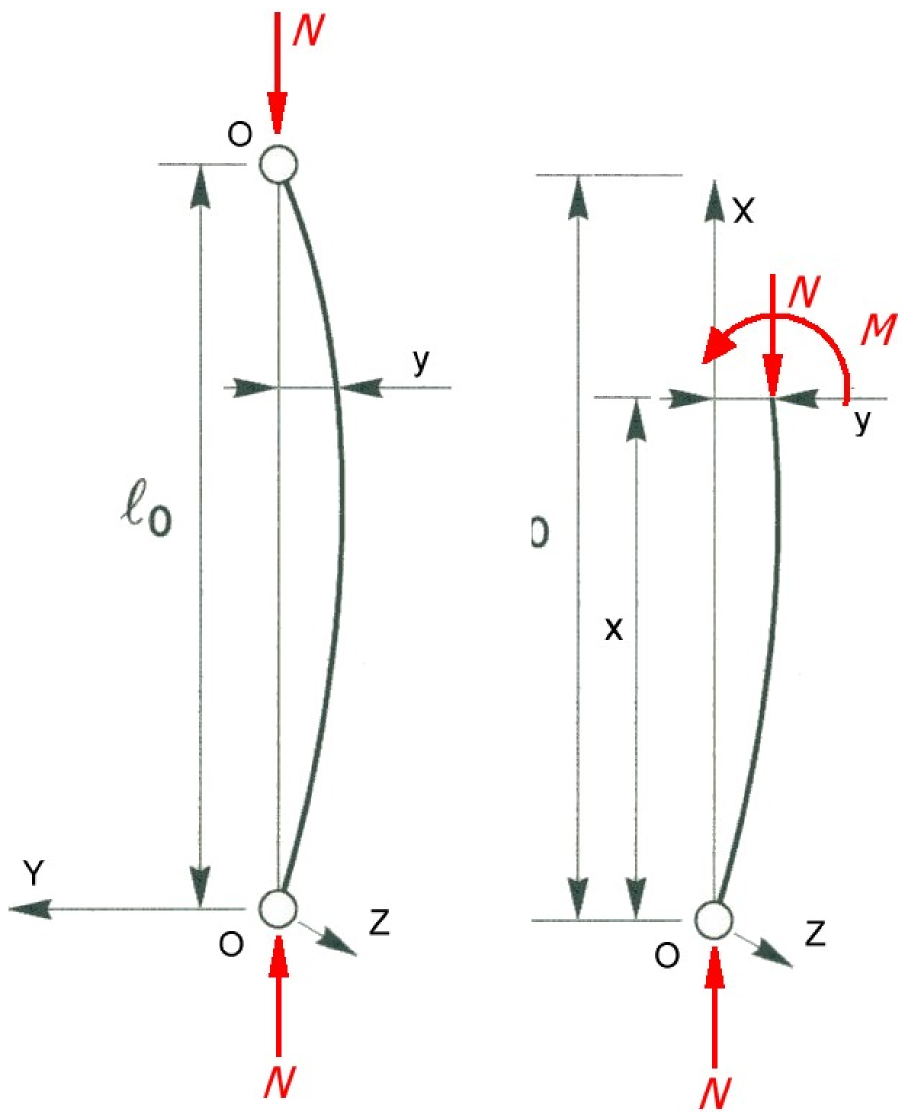
Théorie d'Euler (flexion simple)



$$M(x) = -E.I_z . \frac{d^2 y(x)}{dx^2}$$

Or $$M(x) = N.y(x)$$

Théorie d'Euler (flexion simple)



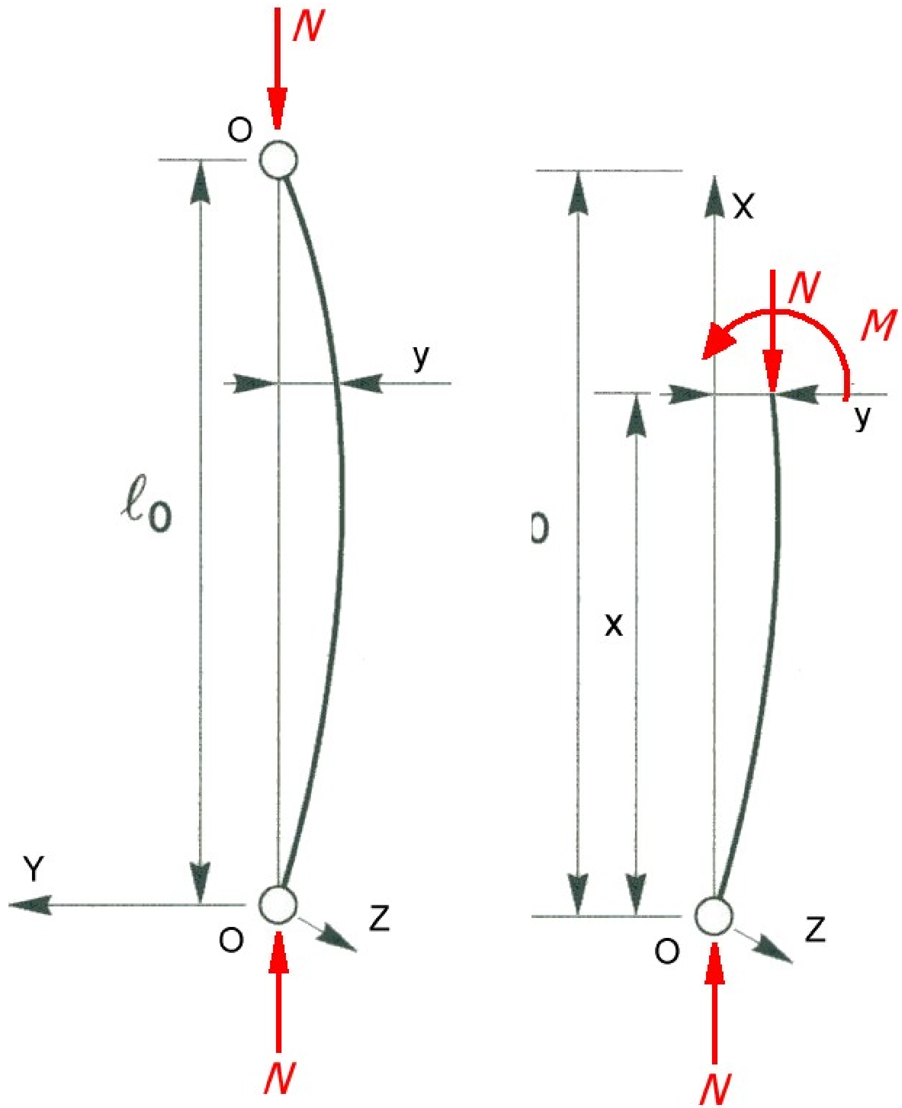
$$M(x) = -E.I_z.\frac{d^2y(x)}{dx^2}$$

Or $\quad M(x) = N.y(x)$

D'où

$$E.I_z.\frac{d^2y(x)}{dx^2} + N.y(x) = 0$$

Théorie d'Euler (flexion simple)



$$M(x) = -E.I_z.\frac{d^2y(x)}{dx^2}$$

Or $M(x) = N.y(x)$

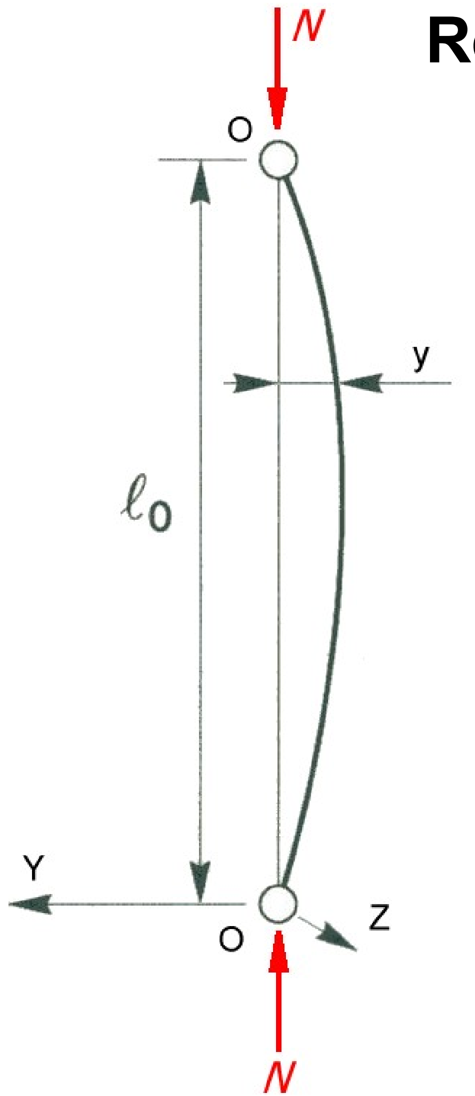
D'où

$$E.I_z.\frac{d^2y(x)}{dx^2} + N.y(x) = 0$$

Soit

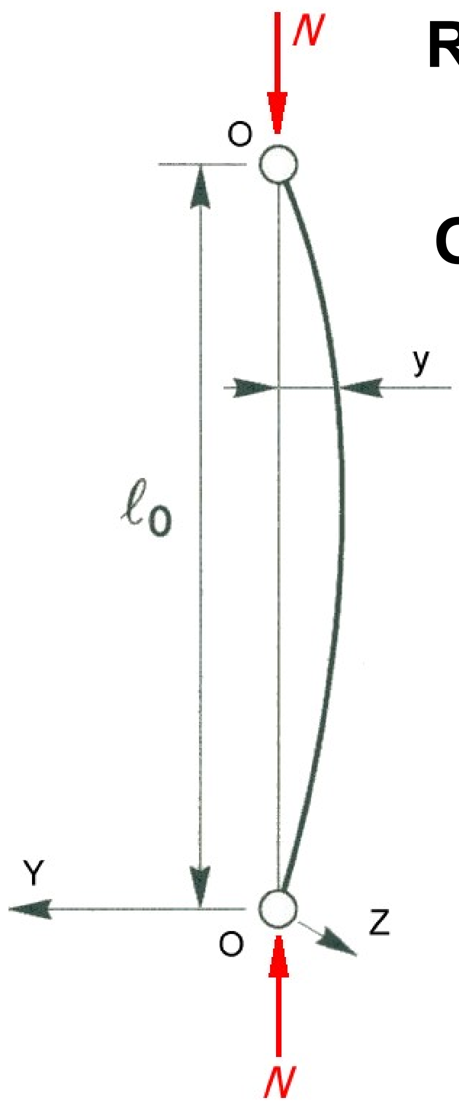
$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + \frac{N}{E.I_z}.y(x) = 0$$

Théorie d'Euler (flexion simple)



Résolution de $\dfrac{d^2y(x)}{dx^2}+\dfrac{N}{E.I_z}.y(x)=0$

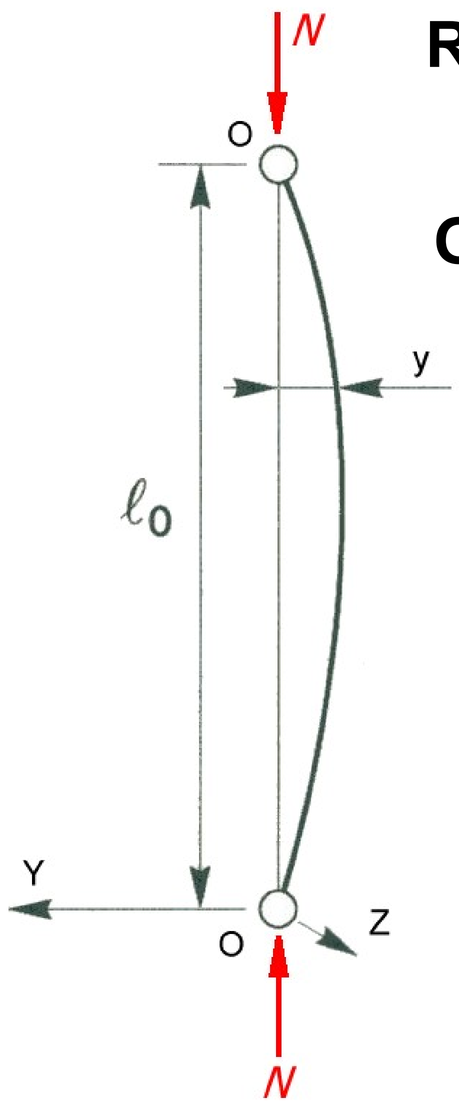
Théorie d'Euler (flexion simple)



Résolution de $\dfrac{d^2y(x)}{dx^2}+\dfrac{N}{E.I_z}.y(x)=0$

On pose : $\alpha=\sqrt{\dfrac{N}{E.I_z}}$ → $\dfrac{d^2y(x)}{dx^2}+\alpha^2.y(x)=0$

Théorie d'Euler (flexion simple)



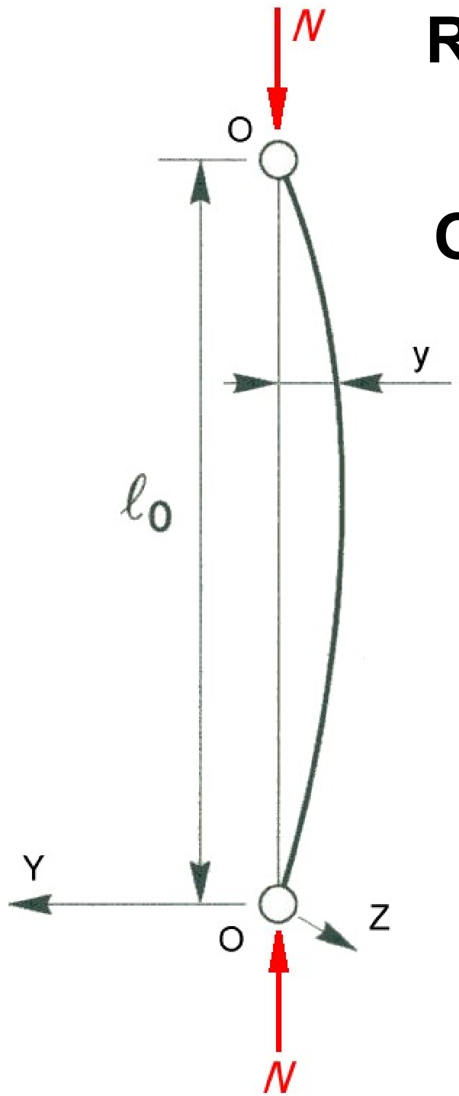
Résolution de $\dfrac{d^2 y(x)}{dx^2} + \dfrac{N}{E.I_z} . y(x) = 0$

On pose : $\alpha = \sqrt{\dfrac{N}{E.I_z}}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{d^2 y(x)}{dx^2} + \alpha^2 . y(x) = 0$

La solution est de la forme :

$$y(x) = A.\cos(\alpha . x) + B.\sin(\alpha . x)$$

Théorie d'Euler (flexion simple)



Résolution de $\frac{d^2y(x)}{dx^2}+\frac{N}{E.I_z}.y(x)=0$

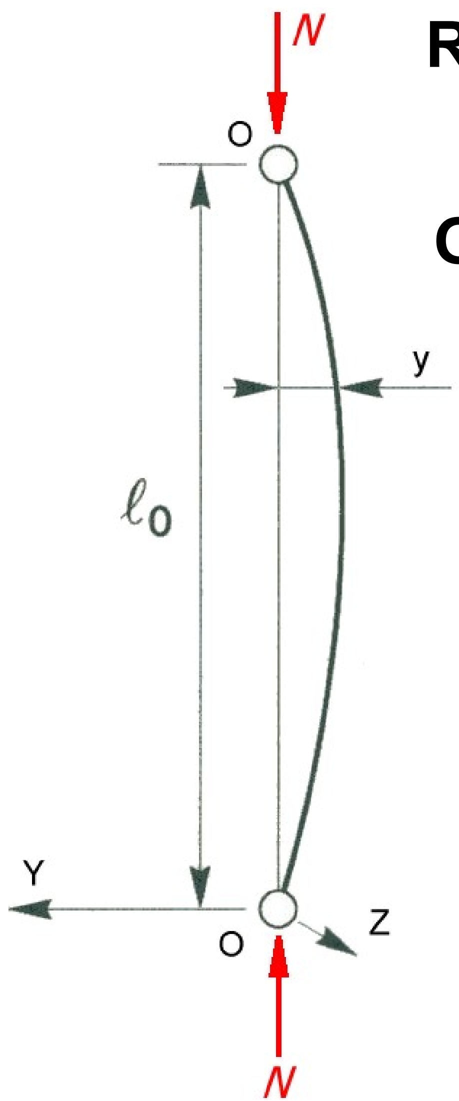
On pose : $\alpha=\sqrt{\frac{N}{E.I_z}}$ → $\frac{d^2y(x)}{dx^2}+\alpha^2.y(x)=0$

La solution est de la forme :

$$y(x)=A.\cos(\alpha.x)+B.\sin(\alpha.x)$$

- En x=0, y(0)=0 : $A=0$
- En x=l0, y(l0)=0 : $B.\sin(\alpha.l_0)=0$

Théorie d'Euler (flexion simple)



Résolution de $\dfrac{d^2y(x)}{dx^2}+\dfrac{N}{E.I_z}.y(x)=0$

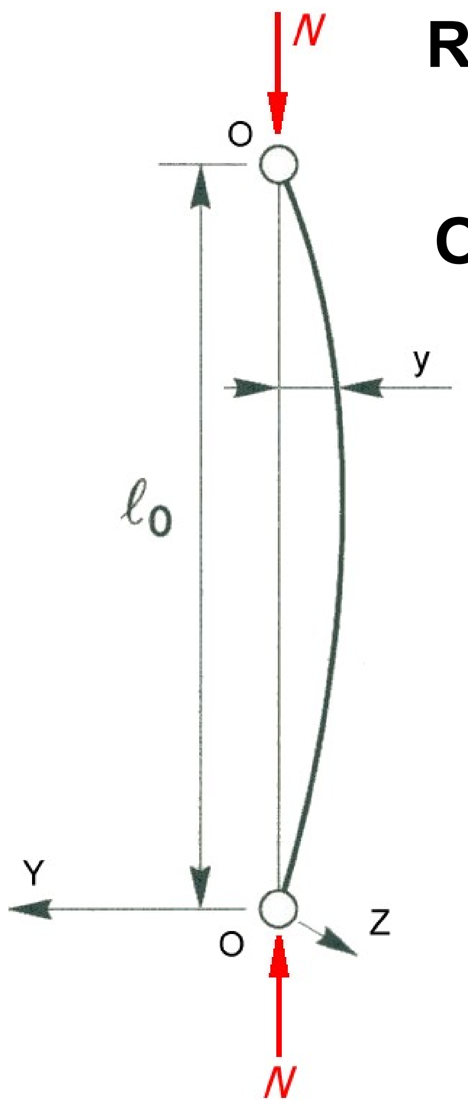
On pose : $\alpha=\sqrt{\dfrac{N}{E.I_z}}$ $\rightarrow$ $\dfrac{d^2y(x)}{dx^2}+\alpha^2.y(x)=0$

La solution est de la forme :

$$y(x)=A.\cos(\alpha.x)+B.\sin(\alpha.x)$$

- **En x=0, y(0)=0 :** $A=0$
- **En x=l0, y(l0)=0 :** $B.\sin(\alpha.l_0)=0$ $\rightarrow$ $B=0$

Théorie d'Euler (flexion simple)



Résolution de $\dfrac{d^2y(x)}{dx^2}+\dfrac{N}{E.I_z}.y(x)=0$

On pose : $\alpha=\sqrt{\dfrac{N}{E.I_z}}$ → $\dfrac{d^2y(x)}{dx^2}+\alpha^2.y(x)=0$

La solution est de la forme :

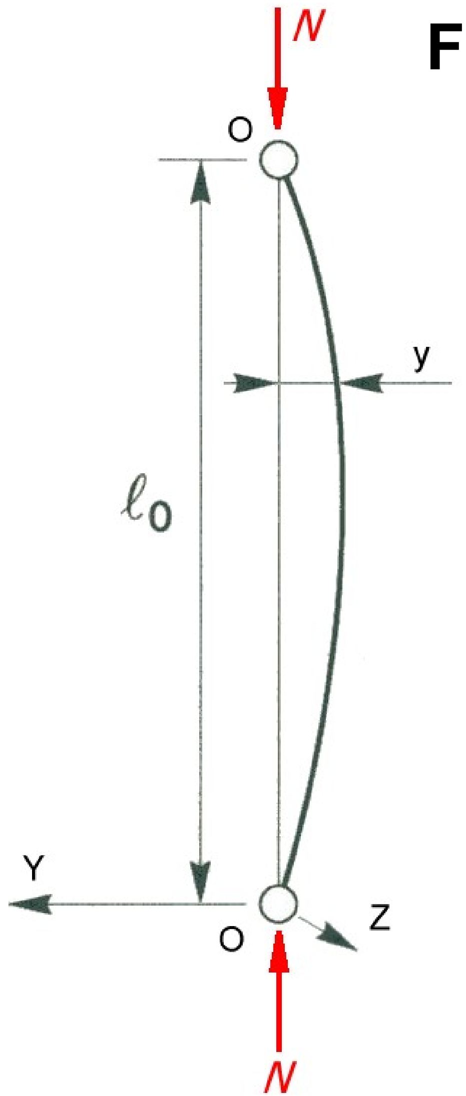
$$y(x)=A.\cos(\alpha.x)+B.\sin(\alpha.x)$$

- En x=0, y(0)=0 : $A=0$
- En x=l0, y(l0)=0 : $B.\sin(\alpha.l_0)=0$

$\sin(\alpha.l_0)=0$ $B=0$

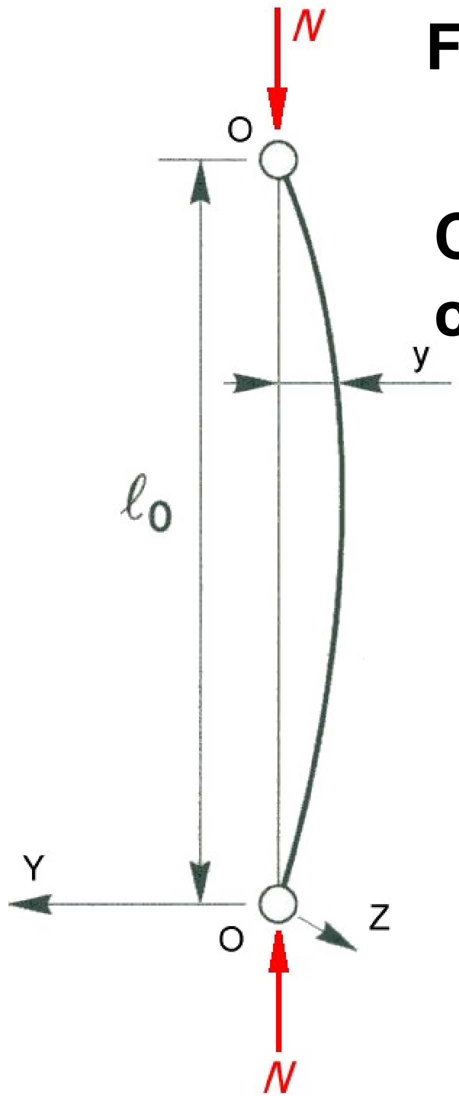
$\alpha.l_0=k.\pi$ → $N=\dfrac{k^2.\pi^2.E.I_z}{l_0^2}$

Théorie d'Euler (flexion simple)



Force critique de flambement $N_k = \dfrac{\pi^2 . E.I_z}{l_0^2}$

Théorie d'Euler (flexion simple)

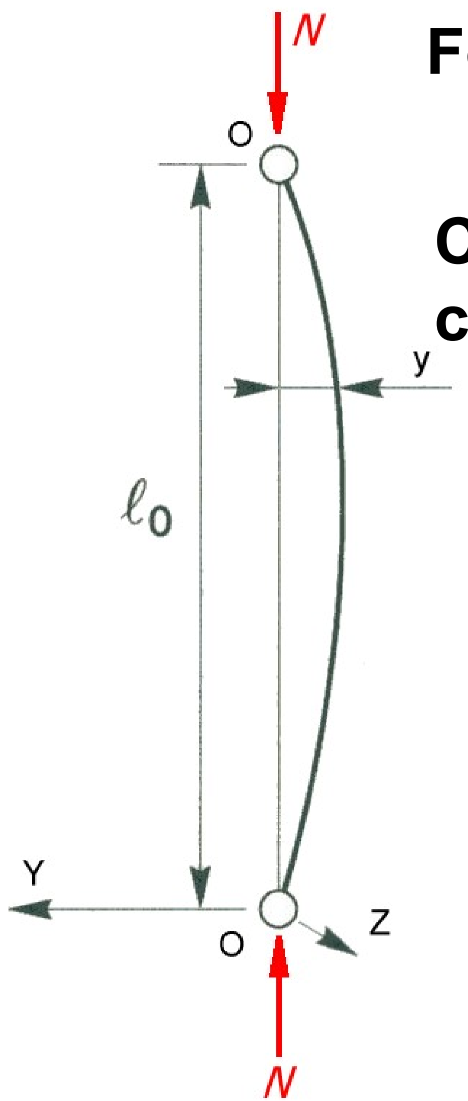


Force critique de flambement $N_k = \dfrac{\pi^2 . E.I_z}{l_0^2}$

Contrainte normale critique :

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 . E.I_z}{l_0^2 . A} = \frac{\pi^2 . E}{l_0^2} . i_z^2$$

Théorie d'Euler (flexion simple)



Force critique de flambement $N_k = \dfrac{\pi^2 . E.I_z}{l_0^2}$

Contrainte normale critique :

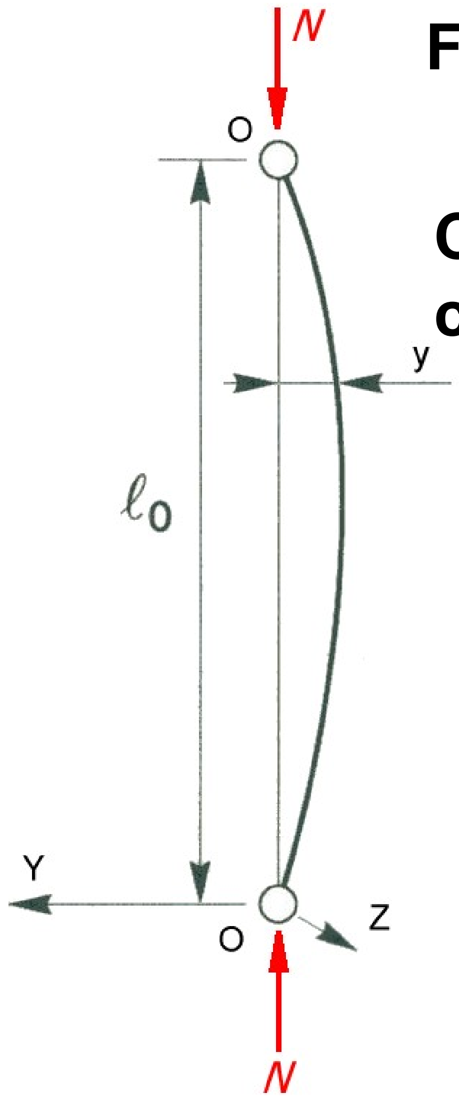
$$\sigma_k = \frac{\pi^2 . E.I_z}{l_0^2 . A} = \frac{\pi^2 . E}{l_0^2} . i_z^2 = \frac{\pi^2 . E}{\lambda^2}$$

$$\lambda = \frac{l_0}{i_z}$$

i_z :Rayon de giration

λ : élancement

Théorie d'Euler (flexion simple)



Force critique de flambement $N_k = \frac{\pi^2 . E.I_z}{l_0^2}$

Contrainte normale critique :

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 . E.I_z}{l_0^2 . A} = \frac{\pi^2 . E}{l_0^2} . i_z^2 = \frac{\pi^2 . E}{\lambda^2}$$

$$\lambda = \frac{l_0}{i_z}$$

i_z :Rayon de giration

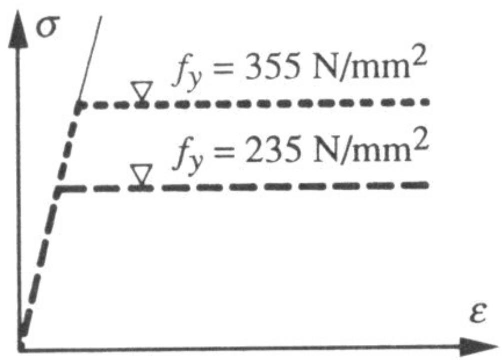
λ : élancement

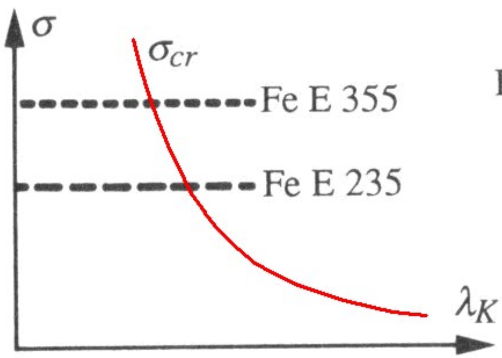
Courbe σk=f(λ) => hyperbole d'Euler

Théorie d'Euler (flexion simple)

Courbe σk=f(λ) => Hyperbole d'Euler

Acier : diagramme σ-ε idéalisé.



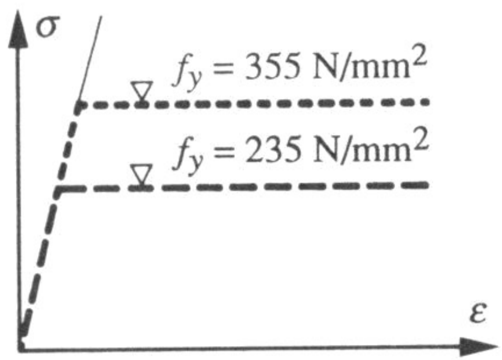


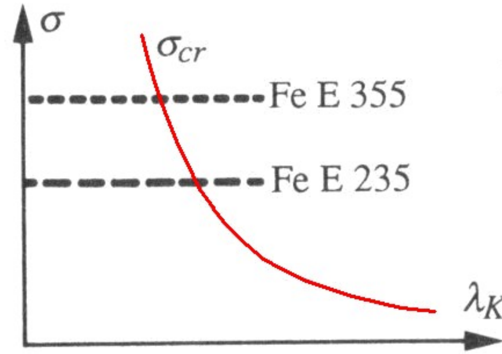
Barre idéale.

Théorie d'Euler (flexion simple)

Courbe σk=f(λ) => Hyperbole d'Euler

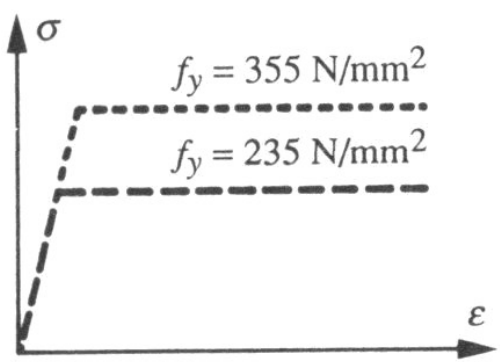
Acier : diagramme σ-ε idéalisé.

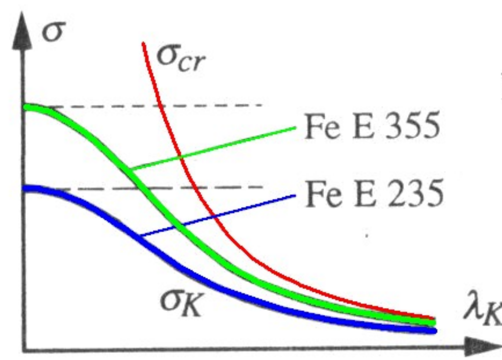




Barre idéale.

Acier : diagramme σ-ε idéalisé.





Barre industrielle.

$$\sigma_{k\ \mathit{réel}} < \sigma_{k\ \mathit{Euler}}$$

CONTACT

Philippe MARON

ISABTP - UPPA

philippe.maron @univ-pau.fr

www.univ-pau.fr/~maron/const_metal/

ISA BTP

ÉCOLE D'INGÉNIEURS

www.univ-pau.fr